Esercizi svolti sui domini di funzioni di due variabili

Esercizio 1. Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\sqrt{y} - 2|x|} + \ln(2x - y)$$

Svolgimento. Dobbiamo imporre che l'argomento di $\ln(\cdot)$ sia strettamente positivo, e che i due termini sotto radice siano non negativi. Otteniamo quindi il sistema di 3 condizioni

$$\begin{cases} 2x - y > 0, \\ y \geq 0, \\ \sqrt{y} \geq 2|x|. \end{cases}$$

Si noti che, poiché entrambi i membri dell'ultima disuguaglianza sono non negativi, si ha che

$$\sqrt{y} \geq 2|x| \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 4x^2 .$$

Quindi concludiamo che

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0,\ 4x^2 \leq y < 2x\right\}$$

In particolare, si noti che per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)$, si ha che $x \geq 0$. Allora $\mathrm{dom}(f)$ è la regione, contenuta nel primo quadrante, compresa fra la parabola $y = 4x^2$ e la retta $y = 2x$ (retta esclusa). Si osservi che $(0,0) \notin \mathrm{dom}(f)$.

Esercizio 2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{|y^2 - x^2|}{\log(x^2 + y^2 - 1)}}$$

Svolgimento. Imponiamo le tre condizioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ \log(x^2 + y^2 - 1) \neq 0, \\ \dfrac{|y^2 - x^2|}{\log(x^2 + y^2 - 1)} \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ora osserviamo che il numeratore di quest'ultima frazione è non negativo per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, quindi la terza condizione equivale a imporre che il denominatore sia strettamente positivo, cioè

$$\log(x^2 + y^2 - 1) > 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 1 > 1 .$$

Chiaramente questa condizione implica sia la prima sia la seconda del sistema (1). Quindi concludiamo che

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 > 2\right\}$$

cioè il complementare del disco chiuso (o palla chiusa) di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \log(4 - x^2) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y} .$$

Si individuino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale il dominio di f_α ha area massima.

Svolgimento. Per determinare $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ imponiamo le tre condizioni

$$\begin{cases} 4-x^2>0 & \Leftrightarrow \ -2<x<2, \\ 1-y^2\geq 0 & \Leftrightarrow -1\leq y\leq 1, \\ \alpha-x-y\geq 0 & \Leftrightarrow y\leq \alpha-x. \end{cases}$$

Quindi $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ è dato dall'intersezione del rettangolo $R=(-2,2)\times[-1,1]$ con la regione al di sotto della retta $y=\alpha-x$, passante per il punto $(0,\alpha)$ e parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante. Anche con un semplice ragionamento grafico si vede che $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ ha area massima per quei valori di α tali che il rettangolo $R=(-2,2)\times[-1,1]$ è interamente contenuto nella regione sottesa dalla retta $y=\alpha-x$. Per tali valori di α si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f_\alpha)=(-2,2)\times[-1,1] \quad\Rightarrow\quad \mathrm{area}(\mathrm{dom}(f_\alpha))=8.$$

Per individuare tali α dobbiamo quindi imporre che

$$\forall\,(x,y)\in(-2,2)\times[-1,1],\quad y\leq\alpha-x,$$

il che è equivalente a chiedere

$$\mathsf{M}:=\max_{y\in[-1,1]} y \ \leq\ \mathsf{I}:=\inf_{x\in(-2,2)}(\alpha-x).$$

Essendo $\mathsf{M}=1$ e $\mathsf{I}=\alpha-2$, concludiamo la condizione

$$1\leq\alpha-2 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\geq 3.$$

Esercizio 4. Determinare l'insieme $\mathrm{dom}(f)\setminus\mathrm{dom}(g)$, ove

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{1-7(x^2+y^2)}+\sqrt[4]{3-7(x^2+y^2)}, \\ g(x,y) &= \log(1-7(x^2+y^2))+xy\,. \end{aligned}$$

Svolgimento. Si vede immediatamente che $\mathrm{dom}(f)$ è determinato dal sistema di condizioni

$$\begin{cases} 1-7(x^2+y^2)\geq 0, \\ 3-7(x^2+y^2)\geq 0. \end{cases}$$

Chiaramente la prima condizione implica la seconda, e concludiamo che

$$\mathrm{dom}(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\quad x^2+y^2\leq\frac{1}{7}\right\},$$

cioè il disco chiuso (o palla chiusa) di centro $(0,0)$ e raggio $1/\sqrt{7}$. D'altra parte

$$\mathrm{dom}(g)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\quad x^2+y^2<\frac{1}{7}\right\},$$

cioè il disco aperto (o palla aperta) di centro $(0,0)$ e raggio $1/\sqrt{7}$. Allora $\mathrm{dom}(f)\setminus\mathrm{dom}(g)$ è la circonferenza $x^2+y^2=\frac{1}{7}$.

Esercizio 5. Determinare il dominio di

$$f(x,y)=\log(49-x^2)+\sqrt{\frac{\arctan(|y-8|)}{x^2+y^2-49}}.$$

Svolgimento. Imponiamo le condizioni

$$\begin{cases} 49 - x^2 > 0, \\ x^2 + y^2 - 49 \neq 0, \\ \dfrac{\arctan(|y-8|)}{x^2+y^2-49} \geq 0. \end{cases}$$

Poiché il numeratore dell'ultima frazione è non negativo (in quanto l'argomento di $\arctan(\cdot)$ è un numero non negativo), la terza condizione è equivalente a

$$x^2 + y^2 - 49 > 0,$$

che chiaramente implica anche la seconda condizione. D'altra parte, la prima condizione è equivalente a $-7 < x < 7$. Quindi concludiamo che

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; -7 < x < 7, \;\, x^2 + y^2 > 49\right\},$$

cioè $\mathrm{dom}(f)$ è l'intersezione della striscia verticale $(-7,7) \times \mathbb{R}$ con il complementare del disco chiuso (o palla chiusa) di centro $(0,0)$ e raggio 7.

Esercizio 6. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, si determini il dominio della funzione

$$f_\alpha(x,y) = \left(x^2 + y^2 - \alpha + 1\right)^{-1/2} + (\alpha - 1)\ln(\alpha - x^2 - y^2)\,.$$

Svolgimento. Notiamo che il primo termine nell'espressione analitica che definisce f_α è

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - \alpha + 1}}.$$

Imponiamo quindi le condizioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \alpha + 1 > 0, \\ \alpha - x^2 - y^2 > 0, \end{cases}$$

da cui

$$\alpha - 1 < x^2 + y^2 < \alpha\,. \tag{2}$$

Tenendo conto che $\alpha \geq 0$, distinguiamo quindi i quattro casi $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, e $\alpha > 1$:

- per $\alpha = 0$, la condizione $x^2 + y^2 > \alpha - 1$ è sempre verificata, in quanto $\alpha - 1 < 0$. Quindi la (2) si riduce a $x^2 + y^2 < 0$, che è impossibile. Quindi

$$\mathrm{dom}(f_0) = \emptyset.$$

- per $0 < \alpha < 1$, la condizione $x^2 + y^2 > \alpha - 1$ è sempre verificata, in quanto $\alpha - 1 < 0$. Quindi la (2) si riduce a $x^2 + y^2 < \alpha$, cioè

$$\mathrm{dom}(f_\alpha) \text{ è il disco aperto (o palla aperta) di centro } (0,0) \text{ e raggio } \sqrt{\alpha}.$$

- per $\alpha = 1$, il secondo termine nell'espressione analitica che definisce f è nullo. Quindi non è necessario imporre la condizione $x^2 + y^2 < \alpha = 1$, e la (2) si riduce a $x^2 + y^2 > \alpha - 1 = 1 - 1 = 0$. Quindi

$$\mathrm{dom}(f_1) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

- per $\alpha > 1$, la (2) implica che $\mathrm{dom}(f_\alpha)$ è la corona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = \alpha - 1$ e $x^2 + y^2 = \alpha$, circonferenze escluse.